

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

„ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ - 14.02.2026

Clasa a IX – a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1 (20 de puncte)a) Să se demonstreze că $\sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$, $(\forall) x, y \geq 0$.b) Să se arate că $(\forall) a, b, c \geq 0$ are loc relația:

$$\sqrt{(a+1)^2 + (b+1)^2} + \sqrt{(b+1)^2 + (c+1)^2} + \sqrt{(c+1)^2 + (a+1)^2} \geq \sqrt{2}(a+b+c+3).$$

Soluție:a) $\sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$, $(\forall) x, y > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x + y)^2 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$. 9p

b) Din punctul a) rezultă:

$$\sqrt{(a+1)^2 + (b+1)^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(a+1+b+1), (\forall) a, b \geq 0 \text{ și analoagele} \quad 6p$$

Prin sumare se obține:

$$\sum \sqrt{(a+1)^2 + (b+1)^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(2a+2b+2c+6) = \sqrt{2}(a+b+c+3), (\forall) a, b, c \geq 0. \quad 5p$$

Problema 2 (20 de puncte)a) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $|1 - 2x| = 28 - 3\sqrt{4x^2 - 4x + 1}$.b) Știind că șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este progresie geometrică, $b_n = 6 \cdot 2^{n-2}$, $(\forall) n \geq 1$, să se afle numărul n pentru care $b_1 + b_2 + \dots + b_n = 93$.**Soluție:**

$$a) |2x - 1| = 28 - 3|2x - 1| \quad 6p$$

$$4|2x - 1| = 28 \Leftrightarrow |2x - 1| = 7 \Leftrightarrow x \in \{-3; 4\} \quad 4p$$

$$b) b_1 = 3 \text{ și } q = 2 \quad 3p$$

$$b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 93 \Rightarrow 3 \cdot (2^n - 1) = 93 \Rightarrow 2^n - 1 = 31 \Rightarrow n = 5 \quad 7p$$

Problema 3 (20 de puncte)

Fie triunghiul echilateral ABC cu centrul O și M un punct în interiorul triunghiului. Dacă M_1, M_2, M_3 sunt proiecțiile punctului M pe laturile triunghiului, să se arate că:

$$\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_3} = \frac{3}{2} \overrightarrow{MO}.$$

Soluție:

Fie $MM_1 \perp BC, M_1 \in BC, MM_2 \perp AC, M_2 \in AC$ și $MM_3 \perp AB, M_3 \in AB$.

$FG \parallel AC, HI \parallel BC, DE \parallel AB, FG \cap HI \cap DE = \{M\}$,

$F, H \in AB, D, G \in BC, E, I \in AC$. (figura) **4p**

Triunghiul ABC echilateral $\Rightarrow O$ este centrul de greutate și conform relației lui Leibniz \Rightarrow

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MO}. \quad \mathbf{4p}$$

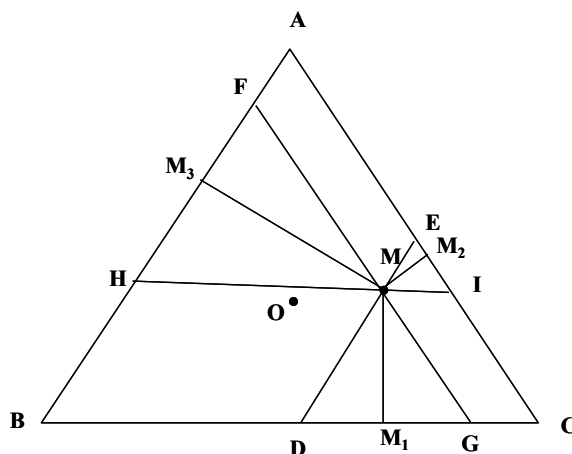
Triunghiurile MDG, MEI, MFH sunt echilaterale iar MM_1, MM_2, MM_3 sunt mediane. **4p**

$$\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MG}), \overrightarrow{MM_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MI}), \overrightarrow{MM_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MF}) \quad \mathbf{4p}$$

$$\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) =$$

Deoarece $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MC}$ atunci **2p**

$$\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{3}{2} \overrightarrow{MO} \quad \mathbf{2p}$$

**Problema 4** (30 de puncte)

Un călător are de parcurs un traseu de lungime 610 km. În prima zi a parcurs 2 km, apoi în fiecare zi, începând cu a doua, cu 3 km mai mult decât în ziua precedentă. Să se afle după câte zile a parcurs întregul traseu.

Soluție:

Dacă z_n este numărul de km parcurși în ziua n , atunci $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie aritmetică **10p**

$$z_1 = 2 \text{ și } r = 3 \quad \mathbf{10p}$$

$$S_n = 610 \Rightarrow 3n^2 + n - 1220 = 0, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n = 20 \quad \mathbf{10p}$$